Por consiguiente, $f(x)$ es acotada en $[a, \alpha+\frac{\delta}{2}]$ y, así, $\alpha+\frac{\delta}{2} \in A$. Ello no es posible ya que $\alpha = \sup A$ y $\alpha+\frac{\delta}{2} > \alpha$.

La contradicción viene de suponer que $\alpha < b$.

Por tanto, ha de ser $\alpha = b$.

Volvemos a usar la continuidad de f, ahora en el punto b, y obtenemos que $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, de manera que existe $\delta > 0$ tal que si $b-\delta < x < b$ entonces $|f(x)-f(b)| < 1$. Luego $-1+f(b) < f(x) < 1+f(b)$ para todo $x \in (b-\delta, b]$.

Por otra parte, para un tal $\delta > 0$, existe $t \in A$ tal que $b-\frac{\delta}{2} < t$.

Obtenemos entonces que $f(x)$ es acotada en $[a,t]$ y en $[b-\frac{\delta}{2}, b] \subseteq (b-\delta, b]$. Así $f(x)$ es acotada en $[a,b]$. □

Hemos demostrado el resultado.

En clase enunciamos el siguiente:

<u>Teorema</u>.

Si f es continua en $[a,b]$ entonces:

(A) f es acotada en $[a,b]$.

(B) Existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo $x \in [a,b]$.

En clase demostramos (B) bajo la hipótesis de que vale (A).

Acabamos de demostrar (A).

La demostración del teorema está completa.